ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 1 2019

УДК 517.977

ИССЛЕДОВАНИЕ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ ТОРМОЖЕНИЯ ДИСКА В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

А. Е. Ламоткин, С. И. Осипов

В работе изучается процесс торможения диска в виде дифференциальной игры. В основу динамической модели положена кулоновская модель трения. Исследуется вопрос существования цены игры при постоянных управлениях игроков при различных значениях начальных скоростей и параметров диска. Критерием качества здесь выбран критерий минимизации тормозного пути. Для каждого из рассмотренных случаев исследуются гарантии первого и второго игрока, и по итогам исследования формулируется утверждение о существовании цены игры или ее отсутствии. Так, например, показано, что в случае торможения без проскальзывания цена игры существует и достигается, когда первый игрок прикладывает максимально допустимое управление, позволяющее ему не проскальзывать, а второй при этом минимизирует трение. В заключение доказывается итоговая теорема о том, что режим без проскальзывания является наилучшим режимом торможения для первого игрока при постоянных управлениях.

Ключевые слова: оптимальное торможение, антагонистическое торможение, дифференциальная игра.

A. E. Lamotkin, S. I. Osipov. Analysis of a game problem of braking a disk in the case of constant controls.

The process of braking a disk in the form of a differential game is studied. The dynamic system is based on the Coulomb friction model. The existence of a game value in the case of constant controls of the players is analyzed for different values of initial velocities and parameters of the disk. The aim is to minimize the braking distance. For each case, the guarantees of the first and second players are examined, and a statement about the existence or nonexistence of a game value is formulated. For example, it is shown that in the case of slip-free braking, there exists a game value, and it is attained when the first player applies the greatest possible control allowing him not to slip and the second player minimizes the friction. In the conclusion of the paper, we prove a final theorem stating that the slip-free mode is the best braking mode for the first player under constant controls.

Keywords: optimal braking, antagonistic braking, differential game.

MSC: 49N90, 70Q05, 70E18

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-93-107

Введение

Развитие колесных транспортных средств и оснащение их автопилотами придает особую актуальность задаче об оптимальном торможении. Данная задача в своей классической постановке о минимизации тормозного пути исследовалась, например, в работе [1]. Однако в таких работах обычно не учитывается неопределенность трения, которое может меняться вследствие нагрева поверхностей, разной степени изношенности участков и т. д.; между тем учет этого факта может помочь улучшить существующие тормозные системы [2].

Авторы фокусируют внимание на том, чтобы рассмотреть задачу об оптимальном торможении как задачу с неопределенной помехой. Один из возможных путей моделирования таких задач предложен в работе [3]; в соответствии с этим подходом помеха может быть рассмотрена как противник-антагонист, а процесс торможения представлен в виде дифференциальной игры. Подобный подход к силе трения не является новым и был использован, например, в [4]. Для рассматриваемой задачи этот подход был сформулирован авторами в работе [5].

В основу динамической модели торможения положена кулоновская концепция сухого трения. Использование данной модели трения несколько упрощает вид правых частей уравнений движения, однако делает их разрывными при смене режима “без проскальзывания” на режим “с проскальзыванием”. Широко разрабатываемые методы решения такого рода задач, как правило, предполагают наличие непрерывности и липшицевости у правых частей, что делает их использование невозможным в данном случае. Поэтому авторы стремятся исследовать существование цены игры, непосредственно вычисляя гарантированный результат первого и второго игроков на классе кусочно-постоянных управлений.

Данная работа служит шагом к получению более общих результатов и посвящена исследованию существования цены игры в случае, когда управление является постоянным. Критерием качества выбран традиционный критерий минимизации тормозного пути. В разд. 1 рассматривается постановка задачи, в разд. 2 исследуется торможение без проскальзывания. Раздел 3 посвящен случаю торможения с проскальзыванием, а в разд. 4 формулируется итоговая теорема о наилучшем режиме торможения для первого игрока.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о торможении абсолютно твердого диска, динамика этой задачи была рассмотрена в работе [5], однако для простоты в данной работе мы примем коэффициент трения качения равным нулю ($\delta = 0$). Итак, динамика задается следующей системой:

1) Качение без проскальзывания ($V_x = -\omega_z R$).

Если выполнено условие

$$\left|\frac{M_z R}{J + mR^2}\right| \le fg, \tag{1.1}$$

то уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\omega}_z = \dfrac{M_z}{J + mR^2}; \\ \dot{V}_x = -\dfrac{M_z R}{J + mR^2}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Иначе, если выполнено условие

$$\left|\frac{M_z R}{J + mR^2}\right| > fg, \tag{1.3}$$

уравнения движения принимают вид

$$\begin{cases} \dot{\omega}_z = \dfrac{M_z - \operatorname{sign}(M_z) fmgR}{J}; \\ \dot{V}_x = -\operatorname{sign}(M_z) fg. \end{cases} \tag{1.4}$$

2) Движение с проскальзыванием ($V_x \ne -\omega_z R$).

$$\begin{cases} \dot{\omega}_z = \dfrac{M_z - \operatorname{sign}(V_x + \omega_z R)\mu mgR}{J}; \\ \dot{V}_x = -\operatorname{sign}(V_x + \omega_z R)\mu g. \end{cases} \tag{1.5}$$

В этих уравнениях V_x — проекция скорости центра диска, ω_z — проекция угловой скорости диска, M_z — проекция момента, тормозящего диск, f — коэффициент трения покоя, μ — коэффициент трения скольжения, m — масса диска, R — радиус диска, J — момент инерции диска, g — ускорение свободного падения.

Будем считать, что процесс торможения происходит при неопределенных параметрах f и μ, и представим его в виде антагонистической дифференциальной игры. В данной игре первый игрок управляет тормозящим моментом $M_z(t)$, а второй — коэффициентами трения $f(t)$ и $\mu(t)$; управления игроков считаем кусочно-постоянными функциями с конечным числом переключений:

$$M_z(t) \equiv M_i, \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1},$$

$$f(t) \equiv f_i, \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1},$$
$$\mu(t) \equiv \mu_i, \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1},$$
$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T,$$

где T — момент остановки диска ($V_x(T) = 0, \omega_z(T) = 0$). Управления игроков предполагаются позиционными, таким образом, моменты переключений заранее не фиксированы, а определено лишь их количество. При этом значения функций удовлетворяют ограничениям

$$|M_i| \le M^*, \quad \mu_{\min} \le \mu_i \le \mu_{\max}, \quad f_{\min} \le f_i \le f_{\max}, \quad \mu_i \le f_i,$$

где M^* — достаточно большая положительная постоянная; $\mu_{\min}, \mu_{\max}, f_{\min}, f_{\max}$ — некоторые положительные постоянные, удовлетворяющие условиям $\mu_{\min} < \mu_{\max} < f_{\max}$ и $\mu_{\min} < f_{\min} < f_{\max}$. Критерием качества будем рассматривать тормозной путь

$$I = \int\limits_0^T |V_x(t)| dt, \tag{1.6}$$

если момента T не существует, то считаем, что I равно бесконечности.

Процесс торможения может быть интерпретирован как движение точки на фазовой плоскости, задача первого игрока при этом заключается в том, чтобы перевести ее из положения (V_0, ω_0) в начало координат согласно указанной динамике системы, минимизируя при этом предложенный критерий качества. Задача второго игрока сводится к тому, чтобы помешать попаданию в начало координат или, если это невозможно, максимизировать критерий качества.

Анализ движения при большом числе переключений является весьма сложной задачей, авторы считают, что предварительно полезно исследовать ситуацию при малом числе переключений, поэтому данная работа посвящена случаю постоянных управлений, когда

$$M_z(t) \equiv M, \quad f(t) \equiv f, \quad \mu(t) \equiv \mu, \tag{1.7}$$

где M, f, μ — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$|M| \le M^*, \quad (f, \mu) \in \mathcal{F} := \big\{(f, \mu) \in [f_{\min}; f_{\max}] \times [\mu_{\min}; \mu_{\max}] \mid f \ge \mu\big\}. \tag{1.8}$$

2. Качение без проскальзывания

При выполнении условия $V_0 = -\omega_0 R$ движение начинается без скольжения, и для торможения первый игрок обязан оставаться в этом режиме, поэтому согласно (1.1) должно выполняться условие

$$|M| \le Cf, \tag{2.1}$$

где $C = \dfrac{Jg + mgR^2}{R}$. Отметим также, что знак V_x не меняется за время торможения. Интегрируя (1.2), получим

$$\begin{cases} \omega_z = \omega_0 + \dfrac{M}{J + mR^2} t; \\ V_x = V_0 - \dfrac{MR}{J + mR^2} t. \end{cases}$$

Найдем момент торможения:

$$T = \frac{-\omega_0(J + mR^2)}{M} = \frac{V_0(J + mR^2)}{MR}; \tag{2.2}$$

отсюда следует, что для торможения M и ω_0 должны быть разных знаков, т. е $M = -\mathrm{sign}(\omega_0)|M|$. Вычислим значение функционала

$$I = I(M, f, \mu) = \int\limits_0^T |V_x(t)| dt = \mathrm{sign}(V_0) \int\limits_0^T \Big(V_0 - \frac{MR}{J + mR^2} t\Big) dt$$

$$= \mathrm{sign}(V_0)\Big(V_0 T - \frac{MRT^2}{2(J + mR^2)}\Big) = \frac{\omega_0^2 R (J + mR^2)}{2|M|}.$$

Рассмотрим существование цены игры, вычислим максимин $\max\limits_{f,\ \mu} \min\limits_M I$, очевидно, что минимум по M достигается при наибольшем значении $|M^r(f, \mu)| = Cf$; здесь и далее буква r будет обозначать рациональный отклик игрока на объявленную стратегию противника:

$$\max_{f,\ \mu} \min_M I = \max_{f,\ \mu} \frac{\omega_0^2 R^2}{2gf} = \frac{\omega_0^2 R^2}{2g f_{\min}}.$$

Таким образом, максимин достигается при значениях управлений

$$M = -\mathrm{sign}(\omega_0) C f_{\min}, \quad f = f_{\min}, \quad \mu \in [\mu_{\min}; \min\{\mu_{\max}, f_{\min}\}].$$

Вычислим минимакс $\min\limits_M \max\limits_{f,\ \mu} I$. Если $|M| \le C f_{\min}$, то значение функции I не зависит от выбора f, если же $|M| > C f_{\min}$, то достаточно выбрать f так, чтобы нарушилось условие (2.1), тогда I обратится в бесконечность вследствие перехода в режим проскальзывания:

$$\min_M \max_{f,\ \mu} I(M, f, \mu) = \min_M I(M, f^r, \mu^r)$$

где

$$f^r(M) = \begin{cases} \text{любое из } [f_{\min}; f_{\max}], & |M| \le C f_{\min}; \\ \text{любое из } \Big[f_{\min}; \dfrac{|M|}{C}\Big), & C f_{\min} < |M| \le C f_{\max}; \\ \text{любое из } [f_{\min}; f_{\max}], & |M| > C f_{\max}, \end{cases}$$

$$\mu^r(M) \in [\mu_{\min}; \min\{\mu_{\max}, f^r(M)\}].$$

Ясно, что минимум по $|M|$ достигается при $|M| \le C f_{\min}$, и так как функция I в этом случае убывает с ростом $|M|$, то минимум достигается при значении $|M| = C f_{\min}$:

$$\min_M I(M, f^r, \mu^r) = \frac{\omega_0^2 R^2}{2g f_{\min}}.$$

Таким образом, максимин достигается при управлениях

$$M = -\mathrm{sign}(\omega_0) C f_{\min}, \quad f \in [f_{\min}; f_{\max}], \quad \mu \in [\mu_{\min}; \min\{\mu_{\max}, f\}].$$

Утверждение 1. *Пусть рассматривается антагонистическое торможение, определяемое динамикой* (1.1)–(1.5), *с показателем качества* (1.6) *и постоянными управлениями* (1.7) *из области* (1.8). *Если начальные значения скоростей удовлетворяют условию* $V_0 = -\omega_0 R$, *то дифференциальная игра имеет цену*

$$\gamma(\omega_0, V_0) = \frac{\omega_0^2 R^2}{2g f_{\min}} = \frac{V_0^2}{2g f_{\min}},$$

которая достигается при значениях управлений

$$M = -\mathrm{sign}(\omega_0) C f_{\min}, \quad f = f_{\min}, \quad \mu \in [\mu_{\min}; \min\{\mu_{\max}, f_{\min}\}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из рассмотренного выше следует, что максимин

$$\underline{\gamma} = \max_{f,\ \mu} \min_{M} I = \frac{\omega_0^2 R^2}{2g f_{\min}},$$

достигающийся при управлениях $M = -\mathrm{sign}(\omega_0) C f_{\min},\ f = f_{\min},\ \mu \in [\mu_{\min}; \min\{\mu_{\max}, f_{\min}\}]$, и минимакс

$$\overline{\gamma} = \min_{M} \max_{f,\ \mu} I = \frac{\omega_0^2 R^2}{2g f_{\min}},$$

достигающийся при управлениях $M = -\mathrm{sign}(\omega_0) C f_{\min},\ f \in [f_{\min}; f_{\max}],\ \mu \in [\mu_{\min}; \min\{\mu_{\max}, f\}]$, совпадают. Поэтому существует цена игры, вычисляемая как

$$\gamma(\omega_0, V_0) = \underline{\gamma} = \overline{\gamma} = \frac{\omega_0^2 R^2}{2g f_{\min}},$$

которая достигается при управлениях

$$M = -\mathrm{sign}(\omega_0) C f_{\min}, \quad f = f_{\min}, \quad \mu \in [\mu_{\min}; \min\{\mu_{\max}, f_{\min}\}].$$

Утверждение доказано.

3. Качение с проскальзыванием

Рассмотрим случай $V_0 \neq -\omega_0 R$. В данном случае движение до некоторого момента T_1 будет происходить с проскальзыванием, после чего выйдет на режим без проскальзывания и должно оставаться таким до момента торможения; при этом вполне возможно, что $T_1 = T$. Если $T_1 \neq T$, то управление первого игрока должно удовлетворять условию (2.1). Закон изменения скоростей может быть получен из уравнений (1.5) — в режиме проскальзывания ($0 \le t \le T_1$), а именно

$$\begin{cases} \omega_z = \omega_0 + \dfrac{M - \mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)\mu m g R}{J} t; \\ V_x = V_0 - \mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)\mu g t, \end{cases}$$

и из (1.2) — в режиме без проскальзывания ($T_1 \le t \le T$), а именно

$$\begin{cases} \omega_z = \omega_1 + \dfrac{M}{J + mR^2}(t - T_1); \\ V_x = V_1 - \dfrac{MR}{J + mR^2}(t - T_1), \end{cases}$$

где $\omega_1 = \omega_z(T_1),\ V_1 = V_x(T_1)$. Из условия $V_1 = -\omega_1 R$ найдем время движения с проскальзыванием

$$T_1 = \frac{J(V_0 + \omega_0 R)}{\mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)\mu(Jg + mgR^2) - MR},$$

вычислим время движения без проскальзывания согласно (2.2)

$$T - T_1 = -\frac{\omega_1 (J + mR^2)}{M} = \frac{V_1 (J + mR^2)}{RM}.$$

Заметим, что если $T_1 \neq T_0$, то для торможения необходимо, чтобы выполнялось условие

$$M = \mathrm{sign}(V_1)|M|. \tag{3.1}$$

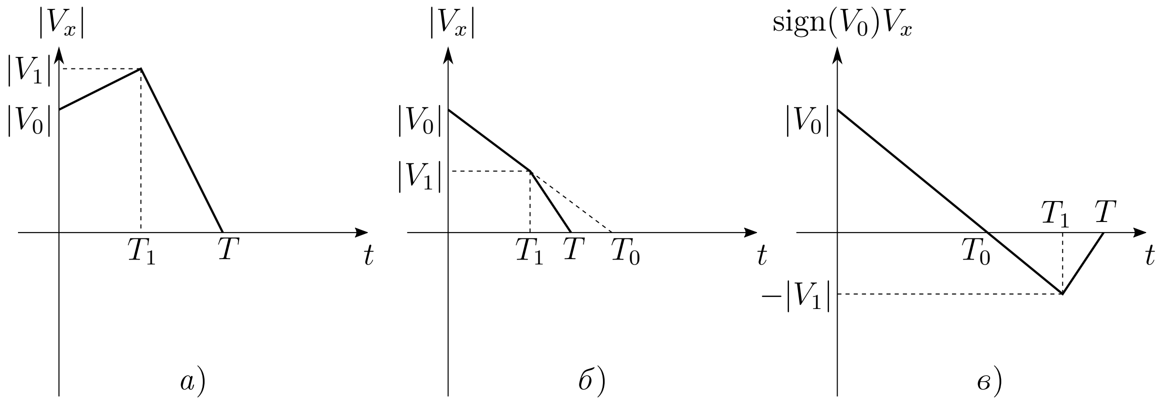

Рис. 1. Поведение V_x: а) в случае $\mathrm{sign}(V_0) \neq \mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)$, б) и в) в случае $\mathrm{sign}(V_0) = \mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)$

Запишем критерии качества в этом случае:

$$I = \int_0^{T_1} |V_x(t)|dt + \int_{T_1}^{T} |V_x(t)|dt.$$

Возможны три варианта поведения V_x (рис. 1), рассмотрим их подробно.

I) Случай $\mathbf{sign}(V_0) \neq \mathbf{sign}(V_0 + \omega_0 R)$. Как понятно из второго уравнения системы (1.5), $|V_x|$ будет возрастать до тех пор, пока движение не выйдет в режим без проскальзывания, после чего будет убывать до момента остановки, этому случаю соответствует рис.1*а*; заметим что $\mathrm{sign}(V_1) = -\mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)$.

Критерий качества может быть переписан в виде (рис.1*а*)

$$I = \frac{(|V_0| + |V_1|)T_1}{2} + \frac{|V_1|(T - T_1)}{2},$$

где

$$T_1 = \frac{J(V_0 + \omega_0 R)}{\mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)\mu(Jg + mgR^2) + \mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)|M|R} = \frac{J|V_0 + \omega_0 R|}{\mu(Jg + mgR^2) + |M|R},$$

$$|V_1| = |V_0| + \mu g T_1,$$

$$T - T_1 = \frac{(|V_0| + \mu g T_1)(J + mR^2)}{|M|R}.$$

С учетом этих формул критерий качества примет вид

$$I = \Big(|V_0| + \frac{\mu g T_1}{2}\Big)T_1 + \frac{(|V_0| + \mu g T_1)^2(J + mR^2)}{2|M|R} = |V_0|T_1 + \frac{\mu g T_1^2}{2} + \frac{(J + mR^2)|V_0|^2}{2|M|R}$$

$$+ \frac{|V_0|\mu g T_1(J + mR^2)}{|M|R} + \frac{\mu^2 g^2 T_1^2(J + mR^2)}{2|M|R}.$$

Рассмотрим существование цены игры, вычислим $\max\limits_{f,\ \mu}\min\limits_{M} I$. Так как при увеличении $|M|$ величина T_1 уменьшается, то величина I также будет уменьшаться, а значит, минимум достигается при максимально возможном значении момента $|M^r(f)| = Cf$. Таким образом,

$$\max_{f,\ \mu}\min_{M} I = \max_{f,\ \mu}\Big(|V_0|T_1 + \frac{\mu g T_1^2}{2} + \frac{|V_0|^2}{2gf} + \frac{|V_0|\mu T_1}{f} + \frac{\mu^2 g T_1^2}{2f}\Big).$$

Очевидно, что при возрастании f величина T_1 будет убывать, поэтому также будет убывать и величина $I(M^r(f), f, \mu)$, которая достигнет своего наибольшего значения при $f = \max\{f_{\min}, \mu\}$. Вычислим частную производную по μ:

$$\frac{\partial I(M^r(f), f, \mu)}{\partial \mu} = |V_0|(T_1)'_\mu + \frac{(\mu T_1)'_\mu g T_1}{2} + \frac{(\mu T_1) g (T_1)'_\mu}{2} + \frac{|V_0|(\mu T_1)'_\mu}{f}$$

$$+ \frac{g\mu T_1 (\mu T_1)'_\mu}{f} = (T_1)'_\mu\Big(|V_0| + \frac{\mu T_1 g}{2}\Big) + (\mu T_1)'_\mu\Big(\frac{gT_1}{2} + \frac{|V_0| + g\mu T_1}{f}\Big),$$

где

$$(T_1)'_\mu = -\frac{(Jg + mgR^2)J|V_0 + \omega_0 R|}{(\mu(Jg + mgR^2) + fg(J + mR^2))^2} = -\frac{Jg + mgR^2}{J|V_0 + \omega_0 R|} T_1^2,$$

$$(\mu T_1)'_\mu = \frac{J|V_0 + \omega_0 R||M|R}{(\mu(Jg + mgR^2) + fg(J + mR^2))^2} = \frac{fg(J + mR^2)}{J|V_0 + \omega_0 R|} T_1^2.$$

Подставляя эти значения в ранее вычисленное выражение, получим

$$\frac{\partial I(M^r(f), f, \mu)}{\partial \mu} = -\frac{Jg + mgR^2}{J|V_0 + \omega_0 R|} T_1^2\Big(|V_0| + \frac{\mu T_1 g}{2}\Big) + \frac{fg(J + mR^2)}{J|V_0 + \omega_0 R|} T_1^2\Big(\frac{gT_1}{2} + \frac{|V_0| + g\mu T_1}{f}\Big)$$

$$= \frac{g(J + mR^2)}{J|V_0 + \omega_0 R|} T_1^2\Big(\frac{gT_1 f}{2} + \frac{\mu T_1 g}{2}\Big),$$

таким образом, частная производная по μ положительна, а значит, $I(M^r(f), f, \mu)$ монотонно возрастает по μ и достигает максимума при значении $\mu = \min\{\mu_{\max}, f\}$.

Если $\mu_{\max} \le f_{\min}$, то $I(M^r(f), f, \mu)$ достигает минимума при $f = f_{\min}, \mu = \mu_{\max}$, иначе, если $\mu_{\max} > f_{\min}$, минимум будет достигаться при $f = \mu = f_0$, где $f_0 \in [f_{\min}; \mu_{\max}]$. Чтобы найти значение f_0, определим максимум функции

$$I(M(f_0), f_0, f_0) = 2|V_0|T_1 + \frac{f_0 g T_1^2}{2} + \frac{|V_0|^2}{2gf} + \frac{f_0 g T_1^2}{2}.$$

Очевидно, что при возрастании f_0 величины T_1 и $(f_0 T_1^2)$ будут убывать, поэтому величина $I(M(f_0), f_0, f_0)$ также будет убывать, а значит, достигнет своего максимума при $f_0 = f_{\min}$.

Подводя итог вышесказанному приходим к выводу, что максимин достигается при управлениях $M = -\mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R) C f_{\min}, f = f_{\min}, \mu = \min\{\mu_{\max}, f_{\min}\}$.

Вычислим $\min\limits_{M} \max\limits_{f,\ \mu} I$, для этого сначала рассмотрим частную производную по μ, произведя вычисления, аналогичные ранее описанным. Получим

$$\frac{\partial I}{\partial \mu} = \frac{T_1^2}{J|V_0 + \omega_0 R|}\Big(\frac{gT_1|M|R}{2} + \frac{\mu T_1 g^2 (J + mR^2)}{2}\Big).$$

Ясно, что величина I будет возрастать при увеличении μ, поэтому если $|M| \le C f_{\min}$, то максимум I достигается при $\mu = \mu_{\max}$ (значение f при этом особой роли не играет и должно лишь быть больше, чем $\mu_{\max}$); если же $|M| > C f_{\min}$, то достаточно взять f таким, чтобы нарушилось условие(2.1) и функция I обратилась в бесконечность. Имеем

$$\min_{M} \max_{f,\ \mu} I = \min_{M} I(M, f^r(M), \mu^r(M)),$$

где

$$f^r(M) = \begin{cases} \text{любое из } [\max\{\mu_{\max}, f_{\min}\}; f_{\max}], & |M| \le C f_{\min}; \\ \text{любое из } \Big[f_{\min}; \dfrac{|M|}{C}\Big), & C f_{\min} < |M| \le C f_{\max}; \\ \text{любое из } [f_{\min}; f_{\max}], & |M| > C f_{\max}, \end{cases}$$

$$\mu^r(M) = \begin{cases} \mu_{\max}, & |M| \le Cf_{\min}; \\ \text{любое из } [\mu_{\min}; \min\{\mu_{\max}, f\}], & |M| > Cf_{\min}. \end{cases}$$

Понятно, что минимум по $|M|$ достигается при $|M| \le Cf_{\min}$, функция $I(M, f^r(M), \mu^r(M))$ при этом будет убывать при возрастании $|M|$ (так как величина T_1, очевидно, убывает с ростом $|M|$). Поэтому минимум функции $I(M, f^r(M), \mu^r(M))$ достигается при $|M| = Cf_{\min}$.

Таким образом, можем заключить, что минимакс достигается при управлениях

$$M = -\operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)Cf_{\min}, \quad f \in [\max\{\mu_{\max}, f_{\min}\}; f_{\max}], \quad \mu = \mu_{\max}.$$

Утверждение 2. *Пусть рассматривается антагонистическое торможение, определяемое динамикой* (1.1)–(1.5), *с показателем качества* (1.6) *и постоянными управлениями* (1.7) *из области* (1.8). *Если начальные значения скоростей удовлетворяют условиям* $\operatorname{sign}(V_0) \ne \operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)$ *и* $V_0 \ne -\omega_0 R$, *то в случае* $\mu_{\max} \le f_{\min}$ *дифференциальная игра будет иметь цену, которая достигается при значениях управлений*

$$M = -\operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)Cf_{\min}, \quad f = f_{\min}, \quad \mu = \mu_{\max},$$

иначе, в случае $\mu_{\max} > f_{\min}$ *дифференциальная игра цены не имеет.*

Доказательство основано на том, что в рассматриваемом случае $\max\limits_{f,\,\mu}\min\limits_{M} I$ и $\min\limits_{M}\max\limits_{f,\,\mu} I$ равны при $\mu_{\max} \le f_{\min}$ и не равны при $\mu_{\max} > f_{\min}$, и может быть оформлено аналогично доказательству утверждения 1.

II. Случай $\operatorname{sign}(V_0) = \operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)$. При торможении движение будет происходить с проскальзыванием до момента T_1, при этом, как понятно из второго уравнения системы (1.5), $|V_x|$ изначально будет убывать и в процессе V_x может сменить знак на противоположный (см. рис.1*в*) в момент времени T_0, если $T_0 \le T_1$, либо не менять знак (см. рис.1*б*), если $T_1 < T_0$. Здесь T_0 является моментом обращения в нуль скорости V_x, при движении в режиме проскальзывания; из второго уравнения системы (1.5) вытекает $T_0 = |V_0|/(\mu g)$.

Управление первого игрока может удовлетворять одному из двух условий: либо $M = \operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)|M|$, либо $M = -\operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)|M|$. Особый случай $M = 0$ удовлетворяет обоим условиям. Если выполнено условие $M = \operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)|M|$, то должно выполняться соотношение $T_1 \le T_0$ (иначе нарушается необходимое для торможения условие (3.1)), поэтому

$$\frac{J|V_0 + \omega_0 R|}{\mu(Jg + mgR^2) - |M|R} \le \frac{|V_0|}{\mu g},$$

откуда получаем ограничение

$$|M| \le \frac{\mu(Jg + mgR^2)|V_0| - J|V_0 + \omega_0 R|\mu g}{|V_0|R},$$

которое может быть переписано как

$$|M| \le A\mu, \quad \text{где} \quad A = \frac{(Jg + mgR^2)|V_0| - J|V_0 + \omega_0 R|g}{|V_0|R};$$

ясно, что при этом величина A, определяемая начальными условиями, должна быть неотрицательной.

Если выполняется условие $M = -\operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)|M|$, то должно выполняться соотношение $T_0 \le T_1$ (так как иначе опять же нарушается условие (3.1)), поэтому

$$\frac{J|V_0 + \omega_0 R|}{\mu(Jg + mgR^2) + |M|R} \ge \frac{|V_0|}{\mu g};$$

выводим

$$|M| \le A\mu, \quad \text{где} \quad A = \frac{(Jg + mgR^2)|V_0| - J|V_0 + \omega_0 R|g}{|V_0|R},$$

откуда

$$|M| \le \frac{J|V_0 + \omega_0 R|\mu g - \mu(Jg + mgR^2)|V_0|}{|V_0|R}$$

или же

$$|M| \le B\mu, \quad \text{где} \quad B = -A = \frac{J|V_0 + \omega_0 R|g - (Jg + mgR^2)|V_0|}{|V_0|R};$$

в этом случае величина A должна быть неположительной.

Подводя итог вышесказанному, можем заключить, что случай $\mathrm{sign}(V_0) = \mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)$ разбивается на подслучаи $A > 0$ и $A < 0$.

а) Случай $A \ge 0$. Тогда, как уже было показано выше, управление первого игрока имеет вид $M = \mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)|M|$ и должно удовлетворять условию

$$|M| \le A\mu. \tag{3.2}$$

Отметим, что из этого условия автоматически следует выполнение условия (2.1), поэтому при выходе на режим без проскальзывания движение останется на нем до момента остановки.

Критерий качества для этого случая (рис.1*б*) может быть вычислен как

$$I = \frac{(|V_0| + |V_1|)T_1}{2} + \frac{|V_1|(T - T_1)}{2},$$

где

$$T_1 = \frac{J|V_0 + \omega_0 R|}{\mu(Jg + mgR^2) - |M|R}, \quad |V_1| = |V_0| - \mu g T_1, \quad T - T_1 = \frac{(|V_0| - \mu g T_1)(J + mR^2)}{|M|R}.$$

С учетом этих формул критерий качества примет вид

$$I = \Big(|V_0| - \frac{\mu g T_1}{2}\Big)T_1 + \frac{(|V_0| - \mu g T_1)^2(J + mR^2)}{2|M|R} = |V_0|T_1 - \frac{\mu g T_1^2}{2} + \frac{(J + mR^2)|V_0|^2}{2|M|R}$$
$$- \frac{|V_0|\mu g T_1(J + mR^2)}{|M|R} + \frac{\mu^2 g^2 T_1^2(J + mR^2)}{2|M|R}.$$

Вычислим максимин $\max\limits_{f,\ \mu}\min\limits_{M} I$, для этого вычислим частную производную

$$\frac{\partial I}{\partial |M|} = |V_0|(T_1)'_{|M|} - \mu g T_1 (T_1)'_{|M|} - \frac{2(|V_0| - \mu g T_1)\mu g (T_1)'_{|M|}(J + mR^2)2|M|R}{4|M|^2R^2}$$
$$- \frac{(|V_0| - \mu g T_1)^2(J + mR^2)2R}{4|M|^2R^2} = \frac{4|M|R(T_1)'_{|M|}(|V_0| - \mu g T_1)(|M|R - \mu g(J + mR^2))}{4|M|^2R^2}$$
$$- \frac{(|V_0| - \mu g T_1)^2(J + mR^2)2R}{4|M|^2R^2},$$

где

$$(T_1)'_{|M|} = \frac{T_1^2 R}{J|V_0 + \omega_0 R|}.$$

Из условия (3.2) следует, что $|M|R < \mu g(J + mR^2)$; отсюда в силу того что $(T_1)'_{|M|} > 0$, вычисленная производная будет отрицательной, а значит, I будет убывать с ростом величины $|M|$ и достигнет минимума при $M^r(f, \mu) = A\mu$:

$$\max_{f,\ \mu}\min_{M} I(M, f, \mu) = \max_{f,\ \mu} I(M^r(f, \mu), f, \mu) = \max_{f,\ \mu} \frac{|V_0|^2}{2g\mu} = \frac{|V_0|^2}{2g\mu_{\min}}.$$

Таким образом, максимин достигается при значениях управлений $M = \operatorname{sign}(V_0+\omega_0 R)A\mu_{\min}$, $f \in [f_{\min}; f_{\max}]$, $\mu = \mu_{\min}$.

Теперь рассчитаем минимакс $\min\limits_{M}\max\limits_{f,\ \mu} I$, вычислим частную производную

$$\frac{\partial I}{\partial \mu} = |V_0|(T_1)'_\mu - \frac{(\mu T_1)'_\mu g T_1}{2} - \frac{\mu g T_1 (T_1)'_\mu}{2} - \frac{|V_0| g(J+mR^2)(\mu T_1)'_\mu}{|M|R} + \frac{\mu T_1 g^2 (J+mR^2)(\mu T_1)'_\mu}{|M|R}$$
$$= (T_1)'_\mu\Big(|V_0| + \frac{\mu g T_1}{2}\Big) + (\mu T_1)'_\mu\Big(-\frac{gT_1}{2}\Big) + \frac{\mu T_1 g^2(J+mR^2) - |V_0| g(J+mR^2)}{|M|R};$$

здесь

$$(T_1)'_\mu = -T_1^2\frac{g(J+mR^2)}{J|V_0+\omega R|}, \quad (\mu T_1)'_\mu = -T_1^2\frac{|M|R}{J|V_0+\omega R|}.$$

С учетом этого получаем

$$\frac{\partial I}{\partial \mu} = \frac{-T_1^3 g}{2J|V_0+\omega R|}(-|M|R + \mu g(J+mR^2)).$$

В силу того что $|M|R < \mu g(J+mR^2)$, данная производная будет отрицательной, а значит функция I убывает с ростом μ. Поэтому если $|M| \le A\mu_{\min}$, то максимум функции достигается при наименьшем значении $\mu^r = \mu_{\min}$, если же $|M| > A\mu_{\min}$, то достаточно взять μ^r таким, чтобы нарушилось условие (3.2), и функция I обратится в бесконечность. Имеем

$$\min_{M}\max_{f,\ \mu} I(M,f,\mu) = \min_{M} I(M,f^r,\mu^r), \quad \text{где} \quad f^r(M) \in [\max\{\mu^r, f_{\min}\}, f_{\max}],$$

$$\mu^r(M) = \begin{cases} \mu_{\min}, & |M| \le A\mu_{\min}; \\ \text{любое из } \Big[\mu_{\min}; \dfrac{|M|}{A}\Big), & A\mu_{\min} < |M| \le A\mu_{\max}; \\ \text{любое из } [\mu_{\min}; \mu_{\max}], & |M| > A\mu_{\max}. \end{cases}$$

Очевидно, что минимум по $|M|$ достигается при $|M| \le A\mu_{\min}$, при этом функция I будет убывать с ростом $|M|$, так как производная

$$\frac{\partial I}{\partial |M|} = \frac{4|M|R(T_1)'_{|M|}(|V_0| - \mu^r g T_1)(|M|R - \mu^r g(J+mR^2)) - (|V_0| - \mu^r g T_1)^2 (J+mR^2)2R}{4|M|^2R^2}$$

отрицательна. Поэтому минимум по $|M|$ достигается при максимально возможном значении $|M| = A\mu_{\min}$, а значит

$$\min_{M} I(M, f^r, \mu^r) = \frac{|V_0|^2}{2g\mu_{\min}}.$$

Таким образом, минимакс достигается при значении управлений $M = \operatorname{sign}(V_0+\omega_0 R)A\mu_{\min}$, $f \in [f_{\min}; f_{\max}]$, $\mu = \mu_{\min}$.

Утверждение 3. *Пусть рассматривается антагонистическое торможение, определяемое динамикой* (1.1)–(1.5)*, с показателем качества* (1.6) *и постоянными управлениями* (1.7) *из области* (1.8)*. Если начальные значения скоростей удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{sign}(V_0) = \operatorname{sign}(V_0+\omega_0 R) \quad \textit{и} \quad A > 0, \quad \textit{где} \quad A = \frac{(Jg + mgR^2)|V_0| - J|V_0+\omega_0 R|g}{|V_0|R},$$

то дифференциальная игра имеет цену

$$\gamma(\omega_0, V_0) = \frac{V_0^2}{2ag},$$

которая достигается при значениях управлений

$$M = sign(V_0+\omega_0 R)A\mu_{\min}, \quad f \in [f_{\min}; f_{\max}], \quad \mu = \mu_{\min}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из того факта, что в рассматриваемом случае $\max\limits_{f,\,\mu}\min\limits_{M} I$ и $\min\limits_{M}\max\limits_{f,\,\mu} I$ равны, и может быть проведено по схеме доказательства утверждения 1.

б) Случай A<0. В этом случае $M = -\mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)|M|$, а также выполнено условие

$$|M| \le -A\mu \text{ (или же } |M| \le B\mu). \tag{3.3}$$

Если движение успевает выйти на режим без проскальзывания, то дополнительно должно выполняться условие (2.1).

Критерий качества может быть записан как (см. рис.1*в*)

$$I = \frac{|V_0|}{2}T_0 + \frac{|V_1|}{2}(T_1 - T_0) + \frac{|V_1|}{2}(T - T_1),$$

где

$$|V_1| = \mu g(T_1 - T_0), \quad T_0 = \frac{|V_0|}{\mu g}, \quad T_1 = \frac{J|V_0 + \omega_0 R|}{\mu(Jg + mgR^2) + |M|R}, \quad T - T_1 = \frac{\mu g(T_1 - T_0)(J + mR^2)}{R|M|}.$$

С учетом этого перепишем критерий качества в виде

$$I = \frac{|V_0|}{2}T_0 + \frac{\mu g(T_1 - T_0)^2}{2} + \frac{\mu^2 g^2 (T_1 - T_0)^2 (J + mR^2)}{2|M|R}.$$

Приступим к вычислению максимина $\max\limits_{f,\,\mu}\min\limits_{M} I$. Ввиду того, что величина T_1 будет убывать при росте величины $|M|$, величина I также будет убывать и достигнет своего минимума при $|M^r(f,\mu)| = B\mu$; так как при этом управлении $T_0 = T_1 = T$, то выполнение условия (2.1) не требуется. Имеем

$$\max_{f,\,\mu}\min_{M} I(M,f,\mu) = \max_{f,\,\mu} I(M^r(f,\mu),f,\mu) = \max_{f,\,\mu}\frac{|V_0|^2}{2\mu g} = \frac{|V_0|^2}{2\mu_{\min} g}.$$

Таким образом, максимин достигается при значениях управлений $M = -\mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)B\mu_{\min}$, $f \in [f_{\min}; f_{\max}]$, $\mu = \mu_{\min}$.

Вычислим минимакс $\min\limits_{M}\max\limits_{f,\,\mu} I$, для этого вычислим частную производную

$$\frac{\partial I}{\partial \mu} = \frac{|V_0|}{2}(T_0)'_\mu + \frac{g(\mu(T_1 - T_0)^2)'_\mu}{2} + \frac{g^2(\mu^2(T_1 - T_0)^2)'_\mu (J + mR^2)}{2|M|R},$$

где

$$(T_0)'_\mu = -\frac{T_0^2 g}{|V_0|}; \quad (\mu T_0)'_\mu = 0; \quad (\mu T_1)'_\mu = T_1^2\frac{|M|R}{J|V_0 + \omega_0 R|};$$

$$(\mu^2(T_1 - T_0)^2)'_\mu = 2\mu(T_1 - T_0)((\mu T_1)'_\mu - (\mu T_0)'_\mu) = 2\mu(T_1 - T_0)T_1^2\frac{|M|R}{J|V_0 + \omega_0 R|};$$

$$(\mu(T_1 - T_0)^2)'_\mu = \left(\frac{f_{2,0}^2(T_1 - T_0)^2}{\mu}\right)'_\mu = 2(T_1 - T_0)T_1^2\frac{|M|R}{J|V_0 + \omega_0 R|} - (T_1 - T_0)^2.$$

Учитывая эти формулы, можем записать

$$\frac{\partial I}{\partial \mu} = \frac{g}{2}\left(-T_0^2 + 2(T_1 - T_0)T_1^2\frac{|M|R}{J|V_0 + \omega_0 R|} - (T_1 - T_0)^2 + 2\mu(T_1 - T_0)T_1^2\frac{g(J + mR^2)}{J|V_0 + \omega_0 R|}\right)$$

$$= \frac{g}{2}(-T_0^2 + 2(T_1 - T_0)T_1 - (T_1 - T_0)^2) = \frac{g}{2}(T_1^2 - 2T_0^2).$$

Производная будет отрицательна, если выполняется условие $T_1^2 < 2T_0^2$ или, иначе говоря, при $\mu < \breve{\mu}(M)$, где

$$\breve{\mu}(M) = \frac{|M|R|V_0|\sqrt{2}}{J|V_0 + \omega_0 R|g - \sqrt{2}|V_0|g(J + mR^2)}.$$

В этом случае функция I будет убывать с ростом μ, а при $\mu > \breve{\mu}(M)$ (т. е. при $T_1^2 > 2T_0^2$) функция I возрастает с ростом μ, а точка $\mu = \breve{\mu}(M)$ является минимумом функции I по μ при фиксированном значении $|M|$. Отметим, что здесь предполагается $J|V_0+\omega_0 R|g - \sqrt{2}|V_0|g(J + mR^2) \neq 0$, однако если $J|V_0 + \omega_0 R|g - \sqrt{2}|V_0|g(J + mR^2) = 0$, то при $|M| > 0$ также будет выполняться условие $T_1^2 < 2T_0^2$ и функция I будет убывать по μ. В другом случае, если $|M| = 0$, будет выполняться условие $T_1^2 = 2T_0^2$ и функция I будет постоянной по μ.

Если $|M| \leq \min\{B\mu_{\min}, Cf_{\min}\}$, то выбор управления μ зависит от расположения минимума функции I при заданном значении $|M|$:

$$\mu^{r*}(M) = \begin{cases} \text{любое из } [\mu_{\min}; \mu_{\max}], & J|V_0 + \omega_0 R|g - \sqrt{2}|V_0|g(J + mR^2) = 0, \quad |M| = 0; \\ \mu_{\min}, & J|V_0 + \omega_0 R|g - \sqrt{2}|V_0|g(J + mR^2) = 0, \quad |M| > 0; \\ \mu_{\max}, & \breve{\mu}(M) \leq \mu_{\min}; \\ \mu_{\min}, & \breve{\mu}(M) \in (\mu_{\min}; \mu_{\max}), \quad I(M, f, \mu_{\min}) \geq I(M, f, \mu_{\max}); \\ \mu_{\max}, & \breve{\mu}(M) \in (\mu_{\min}; \mu_{\max}), \quad I(M, f, \mu_{\min}) \leq I(M, f, \mu_{\max}); \\ \mu_{\min}, & \breve{\mu}(M) \geq \mu_{\max}. \end{cases}$$

Если $|M| > \min\{B\mu_{\min}, Cf_{\min}\}$, то достаточно выбрать управления f и μ так, чтобы нарушилось хотя бы одно из условий — (2.1) или (3.3). Тогда торможение становится невозможным и функция I обращается в бесконечность. Имеем

$$\min_M \max_{f,\ \mu} I(M, f, \mu) = \min_M I(M, f^r(M), \mu^r(M)),$$

где

$$f^r(M) = \begin{cases} \text{любое из } [\max\{\mu^r(M), f_{\min}\}; f_{\max}], & |M| \leq \min\{B\mu_{\min}, Cf_{\min}\}; \\ \tilde{f}, & |M| > \min\{B\mu_{\min}, Cf_{\min}\}; \end{cases}$$

$$\mu^r(M) = \begin{cases} \mu^{r*}(M), & |M| \leq \min\{B\mu_{\min}, Cf_{\min}\}; \\ \tilde{\mu}, & |M| > \min\{B\mu_{\min}, Cf_{\min}\}. \end{cases}$$

Здесь $(\tilde{f}, \tilde{\mu}) \in \tilde{\mathcal{F}}(M) := \{(f, \mu) \in \mathcal{F} |\ (Cf < |M| < B\mu) \vee (|M| > B\mu)\}$.

Минимум по $|M|$, очевидно, достигается при $|M| \leq \min\{B\mu_{\min}, Cf_{\min}\}$, при этом I будет убывать с ростом $|M|$ (так как убывает T_1), поэтому минимум достигается в точке $|M| = \min\{B\mu_{\min}, Cf_{\min}\}$. Если $B\mu_{\min} \leq Cf_{\min}$, то

$$\min_M I(M, f^r(M), \mu^r(M)) = \frac{|V_0|^2}{2\mu_{\min} g}$$

достигается при значениях управлений $M = -\mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)B\mu_{\min},\ f \in [f_{\min}; f_{\max}],\ \mu = \mu_{\min}$.

Если $B\mu_{\min} > Cf_{\min}$, то

$$\min_M I(M, f^r(M), \mu^r(M)) = I(Cf_{\min}, f^r(Cf_{\min}), \mu^r(Cf_{\min}))$$

достигается при управлениях $M = -\mathrm{sign}(V_0 + \omega_0 R)Cf_{\min},\ f \in [\max\{\mu, f_{\min}\}; f_{\max}],\ \mu = \mu^{r*}(Cf_{\min})$.

Утверждение 4. *Пусть рассматривается антагонистическое торможение, определяемое динамикой* (1.1)–(1.5), *с показателем качества* (1.6) *и постоянными управлениями* (1.7) *из области* (1.8), *а начальные значения скоростей удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{sign}(V_0) = \operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R) \quad \text{и} \quad A < 0, \quad \text{где} \quad A = \frac{(Jg + mgR^2)|V_0| - J|V_0 + \omega_0 R|g}{|V_0|R};$$

тогда если $B\mu_{\min} \leq Cf_{\min}$ (*где* $B = -A$), *то дифференциальная игра имеет цену*

$$\gamma(\omega_0, V_0) = \frac{V_0^2}{2g\mu_{\min}},$$

которая достигается при значениях управлений

$$M = \operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)A\mu_{\min}, f \in [f_{\min}; f_{\max}], \mu = \mu_{\min},$$

иначе, если $B\mu_{\min} > Cf_{\min}$, *дифференциальная игра цены не имеет.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из того факта, что в рассматриваемом случае $\max\limits_{f,\,\mu}\min\limits_{M} I$ и $\min\limits_{M}\max\limits_{f,\,\mu} I$ равны при $B\mu_{\min} \leq Cf_{\min}$ и не равны при $B\mu_{\min} > Cf_{\min}$, и может быть оформлено аналогично доказательству утверждения 1.

4. Теорема о наилучшем режиме торможения для первого игрока

Итак, рассмотрев все возможные случаи, мы можем сделать вывод о наилучшем режиме торможения при постоянных управлениях с точки зрения первого игрока.

Теорема. *Пусть рассматривается антагонистическое торможение, определяемое динамикой* (1.1)–(1.5), *с показателем качества* (1.6) *и постоянными управлениями* (1.7) *из области* (1.8). *Тогда наилучший* (*т. е. наименьший*) *гарантированный результат первого игрока достигается, если начальные значения скоростей удовлетворяют соотношению* $V_0 = -\omega_0 R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим гарантированный результат первого игрока $\overline{\gamma} = \min\limits_{M}\max\limits_{f,\,\mu} I$ при различных начальных значениях и параметрах системы.

С л у ч а й 1: $V_0 = -\omega_0 R$, тогда $\overline{\gamma} = \dfrac{V_0^2}{2gf_{\min}}$.

С л у ч а й 2: $\operatorname{sign}(V_0) \neq \operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)$, тогда

$$\overline{\gamma} = \frac{V_0^2}{2gf_{\min}} + |V_0|T_1 + \frac{\mu_{\max} g T_1^2}{2} + \frac{|V_0|\mu_{\max} T_1}{f_{\min}} + \frac{\mu_{\max}^2 g T_1^2}{2f_{\min}},$$

здесь

$$T_1 = \frac{J|V_0 + \omega_0 R|}{(\mu_{\max} + f_{\min})(Jg + mgR^2)}.$$

С л у ч а й 3: $\operatorname{sign}(V_0) = \operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)$ и $A \geq 0$, тогда $\overline{\gamma} = \dfrac{V_0^2}{2g\mu_{\min}}$.

С л у ч а й 4: $\operatorname{sign}(V_0) = \operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)$, $A < 0$ и $B\mu_{\min} \leq Cf_{\min}$, тогда $\overline{\gamma} = \dfrac{V_0^2}{2g\mu_{\min}}$.

С л у ч а й 5: $\operatorname{sign}(V_0) = \operatorname{sign}(V_0 + \omega_0 R)$, $A < 0$ и $B\mu_{\min} > Cf_{\min}$, тогда

$$\overline{\gamma} = \frac{V_0^2}{2g\mu^*} + \frac{\mu^* g(T_1 - T_0)^2}{2} + \frac{\mu^{*2} g(T_1 - T_0)^2}{2f_{\min}},$$

здесь

$$T_0 = \frac{|V_0|}{g\mu^*}, \quad T_1 = \frac{J|V_0 + \omega_0 R|}{(\mu^* + f_{\min})(Jg + mgR^2)}, \quad \mu^* = \mu^{r*}(Cf_{\min}).$$

Вполне очевидно, что гарантия первого игрока в первом случае меньше, чем в случаях 2–4.

Докажем, что гарантия первого игрока в первом случае меньше, чем в случае 5. Если $\mu_{\max} \le f_{\min}$, то $\mu^* \le f_{\min}$, и это утверждение является очевидным. Если же $\mu_{\max} > f_{\min}$, то $f_{\min} \in [\mu_{\min}; \mu_{\max}]$; по ранее доказанному в разд. 3 (случай II б) функция I имеет максимум на отрезке $[\mu_{\min}; \mu_{\max}]$ при заданном значении $|M|$ (в данном случае $|M| = Cf_{\min}$) в точке $\mu = \mu^*$, поэтому

$$\frac{V_0^2}{2g\mu^*} + \frac{\mu^* g(T_1 - T_0)^2}{2} + \frac{\mu^{*2} g(T_1 - T_0)^2}{2f_{\min}} \ge \frac{V_0^2}{2gf_{\min}} + \frac{f_{\min} g(T_1 - T_0)^2}{2} + \frac{f_{\min} g(T_1 - T_0)^2}{2},$$

а последняя величина очевидно больше, чем верхняя цена игры в первом случае.

Теорема доказана.

Заключение

Полученный результат является интуитивно понятным, ведь в режиме без проскальзывания достигается наибольшее значение силы трения, однако доказательство этого потребовало рассмотрения нетривиальных случаев торможения, некоторые из которых представляются весьма специфическими. Так, например, если рассмотреть средние параметры колесного транспортного средства, приведенные в работе [6], становится ясно, что случай $A \ge 0$ является более вероятным, чем случай $A < 0$. Такой подход, однако, оправдан стремлением обеспечить определенную долю математической строгости представленным рассуждениям, что, по мнению авторов, может способствовать расширению рассматриваемой задачи на случай управлений с переключениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Canudas de Wit C., Tsiotras P.** On the optimal braking of wheeled vehicles // Proc. American Control Conf., 2000. P. 569–573. doi: 10.1109/ACC.2000.878964 .
2. **Ламоткин А.Е., Прончатов Д.А.** Анализ возможности улучшения некоторых тормозных систем // Механика. Исследования и инновации: сб. науч. тр. / ред. А. О. Шимановский. Гомель: БелГУТ, 2017. Т. 10. С. 111–115.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Ушаков В.Н., Лебедев П.Д., Матвийчук А.Р., Малёв А.Г.** Дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания и оценка степени нестабильности множеств в этих играх // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 275–287. doi: 10.1134/S0081543812040190 .
5. **Ламоткин А.Е., Осипов С.И., Прончатов Д.А.** О возможности рассмотрения торможения диска в форме антагонистической дифференциальной игры // CEUR Workshop Proc. 2017. Т. 1894. С. 57–63.
6. **Rill G.** Wheel dynamics // Conf. Proc. XII Internat. Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME) / eds. P.S. Varoto and M.A. Trindad. (ABCM, Ilhabela, SP, Brazil, February 26 – March 2, 2007). 2007. P. 1–8.

Поступила 23.11.2018
После доработки 14.01.2019
Принята к публикации 21.01.2019

Ламоткин Алексей Евгеньевич
аспирант
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: alexeylamotkin@yandex.ru

Осипов Сергей Иванович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: sergei.osipov@urfu.ru

REFERENCES

1. Canudas de Wit C., Tsiotras P. On the optimal braking of wheeled vehicles. *Proc. American Control Conf.*, 2000, pp. 569–573. doi: 10.1109/ACC.2000.878964 .
2. Lamotkin A.E., Pronchatov D.A. Analysis of the possibility of improving some brake systems. *Mechanics. Researches and Innovations*, A. O. Shimanovskii (ed.), Gomel': BelGUT Publ., 2017, vol. 10, pp. 111–115 (in Russian).
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
4. Ushakov V.N., Lebedev P.D., Matviychuk A.R., Malev A.G. Differential games with fixed terminal time and estimation of the instability degree of sets in these games. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, pp. 275–287. doi: 10.1134/S0081543812040190 .
5. Lamotkin A.E., Osipov S.I., Pronchatov D.A. On the possibility of considering the braking of a disk in the form of an antagonistic differential game. *CEUR Workshop Proc.*, 2017, vol. 1894, pp. 57–63 (in Russian).
6. Rill G. Wheel dynamics. *Conf. Proc. XII Internat. Symposium on Dynamic Problems of Mechanics* (*DINAME*), P.S. Varoto and M.A. Trindad eds., ABCM, Ilhabela, SP, Brazil, February 26 – March 2, 2007, pp. 1–8.

Received November 24, 2018
Revised January 14, 2019
Accepted January 21, 2019

Aleksey Evgen'evich Lamotkin, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: alexeylamotkin@yandex.ru .

Sergei Ivanovich Osipov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: sergei.osipov@urfu.ru .